Écoulement de Poiseuille.

On étudie l'écoulement permanent d'un fluide incompressible et visqueux dans une canalisation cylindrique horizontale de rayon R et de grande longueur L. On néglige l'effet de la pesanteur. L'écoulement est laminaire et le champ de vitesses est partout parallèle à l'axe Oz.

Question 1 :
Montrer que la vitesse ne dépend pas de la coordonnée z***.***

La forme du champ de vitesses entraîne que les lignes de courant sont des droites parallèles à l'axe et que les tubes de courant des cylindres de génératrices parallèles à l'axe. Le régime permanent a pour conséquence que le débit massique est uniforme à travers un tube de courant de section infiniment petite. Le produit $\mu\, S\, v$ est donc constant et puisque le fluide est incompressible (μ est constant) et le tube cylindrique (S est constant), on en déduit que la vitesse est constante dans ce tube, donc indépendante de la coordonnée z.

Question 2 :
On note donc, en tenant compte de la symétrie de révolution, cette vitesse $v(r)\,\overrightarrow{e_z}$***. Faire un bilan des forces de viscosité sur une portion de fluide entre deux cylindres de rayons*** r ***et*** $r+\mathrm{d}r$ ***et sur une longueur*** $\mathrm{d}z$ ***en admettant que sur une surface d'aire*** $\mathrm{d}S$ ***et de normale radiale le fluide extérieur exerce sur le fluide intérieur une force :*** $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \eta\,\mathrm{d}S\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z}$***. En déduire l'équivalent volumique des forces de viscosité.***

Sur le cylindre extérieur de rayon $r' = r + \mathrm{d}r$ le bilan est

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_1} = \iint \eta\,\mathrm{d}S\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z} = \eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z}\iint \mathrm{d}S = 2\,\pi\,r'\,\mathrm{d}z\,\eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z} = 2\,\pi\,r'\,\mathrm{d}z\,\eta\,\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r'}\overrightarrow{e_z}$$

où $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ est calculé en r'. De même sur le cylindre intérieur de rayon r, en changeant de signe car le système et son extérieur ont inversé leurs positions respectives

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_2} = -2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z\,\eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_z} = -2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z\,\eta\,\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r}\overrightarrow{e_z}$$

où $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ est calculé en r. Le bilan est, avec un développement de Taylor

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = 2\,\pi\,\mathrm{d}z\,\eta\,\overrightarrow{e_z}\left(r'\,\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r'} - r\,\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{r}\right) = 2\,\pi\,\mathrm{d}z\,\eta\,\overrightarrow{e_z}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)(r'-r) = 2\,\pi\,\mathrm{d}z\,\eta\,\overrightarrow{e_z}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r$$

En divisant par le volume $\mathrm{d}V$ ce cylindre de hauteur $\mathrm{d}z$ et d'aire

$$\mathrm{d}S = \pi\,(r'^2 - r^2) = \pi\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2)\,\mathrm{d}r = 2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r$$

d'où un volume élémentaire $\mathrm{d}V = 2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ et une force volumique

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}F}}{\mathrm{d}V} = \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Question 3 :
On note de même la pression $p(r,z)$***. Montrer qu'en fait*** p ***ne dépend pas de*** r ***et que*** $\eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = Cte$

L'équation d'Euler s'écrit, puisque la pesanteur est négligée

$$\mu\,\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \eta\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Or on a vu plus haut que les trajectoires sont rectilignes, parallèles à Oz et parcourues à vitesse constante, donc l'accélération particulaire est nulle et

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \eta \, \frac{1}{r} \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right) \, \overrightarrow{e_z}$$

En projection radiale, on en déduit $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, donc p ne dépend pas de r et ne dépend que de z et, en projection axiale, on a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta \, \frac{1}{r} \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right)$$

On rappelle que

$$[\forall z \forall r \, f(z) = g(r)] \Rightarrow [f(z) = g(r) = Cte]$$

Il suffit en effet de choisir un r particulier, disons r_0, pour affirmer $\forall z \, f(z) = g(r_0)$ où $g(r_0)$ est bien une constante. Donc

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta \, \frac{1}{r} \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right) = Cte$$

Question 4 :
On note $p_A = p(0)$ et $p_B = p(L)$. En déduire le champ de vitesse en fonction de r, R et $v_0 = v(0)$.

Au vu de ce qui précède p est une fonction du premier degré de z, d'où

$$p(z) = p_A + \frac{p_B - p_A}{L} \, z$$

et $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{p_B - p_A}{L}$ donc

$$\eta \, \frac{1}{r} \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right) = \frac{p_B - p_A}{L}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right) = \frac{(p_B - p_A) \, r}{\eta \, L}$$

$$r \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{(p_B - p_A) \, r^2}{2 \, \eta \, L} + A$$

où A est une constante d'intégration

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{(p_B - p_A) \, r}{2 \, \eta \, L} + \frac{A}{r}$$

$$v = \frac{(p_B - p_A) \, r^2}{4 \, \eta \, L} + A \, \ln(r) + B$$

où B est une seconde constante d'intégration. La vitesse est finie en $r = 0$ donc A est nul ; **ce raisonnement est récurrent en physique**. Puisqu'un fluide visqueux a une vitesse nulle au contact d'une paroi solide, on a $v(R) = 0$, d'où l'on tire B que l'on reporte dans v(r), soit en escamotant le signe négatif par permutation de A et B

$$v(r) = \frac{p_A - p_B}{4 \, \eta \, L} \, (R^2 - r^2)$$

On parle de *profil parabolique des vitesses.*

Question 5 :
En déduire l'expression du débit volumique Q et la relation de Poiseuille liant la chute

de pression $p_A - p_B$ et le débit Q. Comparer avec la loi d'Ohm et définir la notion de résistance hydraulique de la canalisation ; varie-t-elle de la même façon qu'une résistance électrique en fonction de sa longueur ? de sa section ?

On ne peut pas calculer Q par une formule du style $Q = \mu\, S\, v$ car la vitesse n'est pas uniforme. Découpons un section de la canalisation en couronnes entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$, de surface $\mathrm{d}S = 2\,\pi\, r\, \mathrm{d}r$ (cf *supra*) et intégrons les débits élémentaires

$$Q = \int_0^R \mu\, v(r)\, \mathrm{d}S = \frac{2\,\pi\,\mu\,(p_A - p_B)}{4\,\eta\, L} \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, \mathrm{d}r = \frac{2\,\pi\,\mu\,(p_A - p_B)}{4\,\eta\, L} \left[\frac{R^2\, r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$Q = \frac{2\,\pi\,\mu\,(p_A - p_B)}{4\,\eta\, L}\, \frac{R^4}{4} = \frac{\pi\,\mu\,(p_A - p_B)\, R^4}{8\,\eta\, L}$$

soit en introduisant l'aire $S = \pi\, R^2$

$$Q = \frac{\mu\,(p_A - p_B)\, S^2}{8\,\pi\,\eta\, L}$$

Par analogie entre débit de masse Q et débit de charges I, différence de pression $p_A - p_B$ et de potentiel $V_A - V_B$, la loi d'Ohm $I = (V_A - V_B)/R$ permet de définir une résistance hydraulique

$$R_H = \frac{8\,\pi\,\eta\, L}{\mu\, S^2}$$

Si l'on essaie de pousser plus loin avec $R = \rho\, L/S$ où ρ est la résistivité, on voit que l'analogie a ses limites : les résistances électrique et hydraulique sont bien toutes deux proportionnelles à L, mais la première est inversement proportionnelle à S, le seconde à S^2.

Par exemple passer d'une canalisation de diamètre intérieur 12 mm à une de diamètre 10 mm (ce qui semble peu différent) multiplie la résistance d'un facteur $1,2^4 \approx 2$; à différence de pression égale, le débit a chuté de 50 % !